3/4/2017

Πρόταση (Κριτήριο Ριζών του Cauchy)

$\sum a_\nu$ συγκλίνει αν $\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1$.

Δυναμοσειρές

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

(δυναμοσειρά με κέντρο το a), $a_\nu, a \in \mathbb{C}$.

* Όλες οι δυναμοσειρές στο κέντρο τους έχουν τιμή:

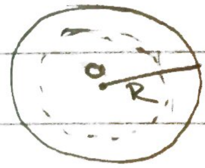
$z=0$: $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = a_0$

* Θέλω να εξετάσω αν η δυναμοσειρά συγκλίνει, άρα σύμφωνα με το κριτήριο ριζών του Cauchy είναι: $z \in \mathbb{C}$:

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu (z-a)^\nu|} = |z-a| \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$$

$\limsup |z-a| \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = L < 1.$

$|z-a| \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1.$



$$|z-a| < \frac{1}{\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}} = R \Rightarrow \boxed{z \in B(a,R)}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η σειρά δε συγκλίνει για σημεία εκτός της σφαίρας.

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0)$, $\nu \geq \nu_0$, $\forall r \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{j=1}^{r} a_{\nu+j}\right| < \varepsilon \Rightarrow |a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots + a_{\nu+r}| < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_{\nu+1}| < \varepsilon \Rightarrow a_\nu \to 0.$

Έστω $|z-a| > R$. Δηλαδή $|z-a| > \rho > R$, όπου $\frac{1}{R} > \frac{1}{\rho}$

$\exists\, \epsilon = \frac{1}{R} > \sigma > \frac{1}{\rho} \Rightarrow \boxed{\sigma\rho > 1}$

$\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{R} > \sigma$.

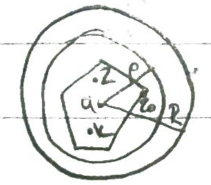
$\exists\, k_\nu = \sqrt[k_\nu]{|a_{k_\nu}|} > \sigma$ με $|a_{k_\nu}| > \sigma^{k_\nu}$

$|a_{k_\nu}(z-a)^{k_\nu}| = |a_{k_\nu}||z-a|^{k_\nu} > \sigma^{k_\nu}\rho^{k_\nu} = (\sigma\rho)^{k_\nu} \to \infty$, ξ άτοπο

Άρα για σημείο εκτός του δίσκου η σειρά δε συγκλίνει.
Για σημεία πάνω στο δίσκο δε γνωρίζω.

Πρόταση Έστω $K \subseteq B(a,R)$ συμπαγές, τότε η $\sum f_\nu|_K$ συγκλίνει ομοιόμορφα. (αν $\varphi_\nu \to \varphi$ ομοιόμορφα; τότε $\lim \int_a^b \varphi_\nu = \int_a^b \lim \varphi_\nu$)

$\Rightarrow f_\nu = a_\nu(z-a)^\nu$



$\varphi(z) = |z-a| \in \mathbb{R}$, $z \in K$.

$\exists\, z_0 \in K : \varphi(z) \le \varphi(z_0)$, $\forall z \in K$.

$K \cap B^c(a,R) = \emptyset$.

$\forall z \in K : |z-a| \le \varphi(z_0) < R$, $|z-a| < \rho < R$

$|a_\nu(z-a)^\nu| = |a_\nu||z-a|^\nu < |a_\nu|\rho^\nu = M_\nu$

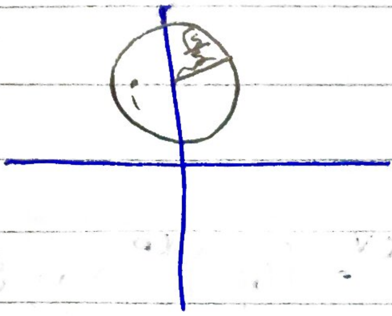
$\sqrt[\nu]{M_\nu} = \sqrt[\nu]{|a_\nu|\rho^\nu} = \sqrt[\nu]{|a_\nu|}\rho$

$\limsup \sqrt[\nu]{M_\nu} = \rho \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{\rho}{R} < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

Π.χ. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty}(1+2i)^\nu (z-i)^\nu$;

$\sqrt[\nu]{|1+2i|^\nu} = |1+2i| = \sqrt{5}$



$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$(\varphi(z))$ $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_\nu(z-a)^\nu + \dots$

$(g(z))$ $*$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu (z-a)^{\nu-1} = a_1 + 2a_2(z-a) + \dots + \nu a_\nu (z-a)^{\nu-1} + \dots$

→ Δυναμοσειρά των παραγώγων της πάνω.

Ακτίνα σύγκλισης $\sqrt[\nu]{|\nu a_\nu|} = \sqrt[\nu]{\nu} \cdot \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$

Ισχύει ότι: $\limsup(a_\nu b_\nu) \leq (\limsup a_\nu)(\limsup b_\nu)$. $(a_\nu, b_\nu \geq 0)$

$\exists \lim a_\nu : \Rightarrow \limsup(a_\nu b_\nu) = \lim a_\nu \cdot \limsup(b_\nu)$.

είναι $\sqrt[\nu]{\nu} \longrightarrow 1$, αφού $\sqrt[\nu]{\nu} = (1+\theta_\nu)^2$

$\sqrt{\nu} = (1+\theta_\nu)^\nu \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + \nu\theta_\nu$

$\frac{1}{\sqrt{\nu}} \geq \frac{1}{\nu} + \theta_\nu \geq 0.$

$\frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0$ άρα $\frac{1}{\nu} + \theta_\nu \to 0$.

Οπότε, $\limsup \sqrt[\nu]{|\nu a_\nu|} = 1 \cdot \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{R}$

$*$ Ν.δ.ο. $\frac{d}{dz} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (z-a)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(a_\nu (z-a)^\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z-a)^{\nu-1}$

Απόδ.

$$\lim \frac{\varphi(z)-\varphi(w)}{z-w} = g(w)$$

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(w)}{z-w} - g(w) = \frac{1}{z-w}\left[\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu z^\nu - \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu w^\nu\right] - \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu a_\nu w^\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu \left(\frac{z^\nu - w^\nu}{z-w} - \nu w^{\nu-1} \right).$$

Για $\nu\geq 2$ $\left|\frac{z^\nu-w^\nu}{z-w}-\nu w^{\nu-1}\right| = \left|z^{\nu-1}+z^{\nu-2}w+z^{\nu-3}w^2+\dots+w^{\nu-1}-\nu w^{\nu-1}\right|$

$=\left|(z^{\nu-1}-w^{\nu-1})+(z^{\nu-2}-w^{\nu-1})+\dots+(w^{\nu-1}-w^{\nu-1})\right|$

ταυτότ. διαφοράς δυνάμεων $=\left|(z-w)[z^{\nu-2}+z^{\nu-3}w+\dots+w^{\nu-2}]+w(z-w)[z^{\nu-3}+z^{\nu-4}\cdot w+\dots+w^{\nu-3}]\right.$

$(\rho<R)$ $\left.+(z-w)w^{\nu-2}\right|$

$\leq |z-w|\left|(\nu-1)\rho^{\nu-2}+(\nu-2)\rho^{\nu-2}+\dots+\rho^{\nu-2}\right|$

$=|z-w|\rho^{\nu-2}(1+2+\dots+\nu-1)$

$=|z-w|\rho^{\nu-2}\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ (ελέγχω αν συγκλίνει.)

Οπότε έχουμε: $\frac{\varphi(z)-\varphi(w)}{z-w}-g(w)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\left(\frac{z^\nu-w^\nu}{z-w}-\nu w^{\nu-1}\right)$

και $\left|\frac{z^\nu-w^\nu}{z-w}-\nu w^{\nu-1}\right|\leq |z-w|\rho^{\nu-2}\frac{\nu(\nu-1)}{2}$

$|a_\nu(\dots)|\leq |a_\nu|\rho^{\nu-2}\frac{\nu(\nu-1)}{2}|z-w|$

$\limsup\sqrt[\nu]{|a_\nu|\rho^{\nu-2}\frac{\nu(\nu-1)}{2}}=\limsup\left(\sqrt[\nu]{|a_\nu|}\cdot\rho^{1-\frac{2}{\nu}}\cdot\sqrt[\nu]{\nu}\cdot\sqrt[\nu]{\nu-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[\nu]{2}}\right)$

$=\rho\cdot\frac{1}{R}=\frac{\rho}{R}<1$

άρα συγκλίνει.

Σειρά Laurent:

$\underbrace{\dots+a_{-2}(z-a)^{-2}+a_{-1}(z-a)^{-1}}+\underbrace{a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\dots}$

$\sum_{\nu=1}^{+\infty}a_{-\nu}(z-a)^{-\nu}$ (2) $+$ $\sum_{\nu=0}^{+\infty}a_\nu(z-a)^\nu$ (1)

$(-\nu=\mu)$

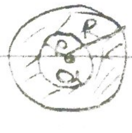
$\sum_{-\infty}^{-1}a_\mu(z-a)^\mu+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(z-a)^\nu=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}a_\nu(z-a)^\nu.$

η (1): $\sum a_\nu(z-a)^\nu$: $|z-a|<R$, $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$

Για την (2): $\limsup\sqrt[\nu]{|a_\nu||z-a|^{-\nu}}=\limsup\sqrt[\nu]{|a_\nu|}\cdot\frac{1}{|z-a|}<1$

$\rho=\limsup\sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|}$ $\Rightarrow |z-a|>\rho.$

το z είναι έξω από το δίσκο με κέντρο α και ακτίνα ρ.



Άρα η σειρά Laurent συγκλίνει σε ένα δακτύλιο
$\Delta(a,\rho,R)$ $\boxed{\rho<R}$

Πολ/κή

$p(z)=a_0+a_1z+\dots+a_kz^k$, $z\in\mathbb{C}$.

$a_k\neq 0$. k: τάξη του πολ/μου.

Είναι ολόμορφη: δηλ. παραγωγίζεται παντού.

(Η πιο απλή ολόμορφη)

Ρητές

$r(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{a_0+a_1z+\dots+a_kz^k}{b_0+b_1z+\dots+b_\lambda z^\lambda}$ δεν έχουν κοινή ρίζα

Ορίζεται παντού, εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

πχ $r(z)=\frac{z^2+1}{z(z-3i)}=\frac{z^2+1}{z^2-3iz}$ > δεν έχουν κοινές ρίζες.

(*) $\frac{1}{z(z-3i)}^{*}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z-3i}=\frac{(a+b)z-3ia}{\dots}^{*}$

(*) αυτά θα πρέπει να είναι ίσα.

Άρα $a+b=0$ και $1=-3ia$.

Εκθετική

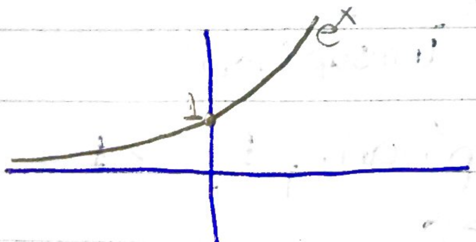
e^x, όπου $e=\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$

$\lim\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu=e^x$

Ισχύει: * $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$

* $\boxed{\varphi(x+y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)}$: βασική ιδιότητα της εκθετικής

* $(e^x)'=e^x$, $(e^x)''=e^x$



$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\dots$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{1}{v!} z^v$$ (δυναμοσειρά)

Βρίσκω ακτίνα σύγκλισης : $\sqrt[v]{\frac{1}{v!}} = \frac{1}{\sqrt[v]{v!}}$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[v]{\frac{1}{v!}}} = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[v]{v!}}} = \liminf \sqrt[v]{v!}$$

$\sqrt[v]{v!} \uparrow$, $\sqrt[v+1]{(v+1)!} > \sqrt[v]{v!} \xrightarrow[\text{στη } (v)]{\text{υψώνω}} (v+1)!^v > (v!)^{v+1}$

$\Rightarrow (v!)^v (v+1)^v > (v!)^v v! \Rightarrow (v+1)^v > v!$

Είναι $\left.\begin{array}{l} v+1 > v \\ v+1 > v-1 \\ \vdots \\ v+1 > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (v+1)^v > v!$

• $\sqrt[2v]{(2v)!} = \sqrt[2v]{\underset{\geq v}{(2v)}\underset{\geq v}{(2v-1)}\cdot\ldots\cdot v(v-1)\underset{\geq 1}{(v-2)}\ldots\underset{\geq 1}{1}} \geq \sqrt[2v]{v^v} = \sqrt[2]{v} \to \infty$

Άρα $R = +\infty$. (*Η δυναμοσειρά έχει έννοια για κάθε μιγαδικό *)

(*) $\frac{d}{dz} e^z = \frac{d}{dz} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} z^v = \frac{d}{dz}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \dots\right) = 0 + 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$

$= e^z$ Άρα η ιδιότητα αυτή ισχύει και στους μιγαδικούς

(*) $e^z \cdot e^{a-z} = \varphi(z) = \varphi(a) = e^a \cdot e^0 = a^a$ $(e^0 = 1)$

$\varphi'(z) = e^z \cdot e^{a-z} + e^z(e^{a-z}(-1)) = 0.$

(*) Είδαμε ότι όταν $\varphi'(z) = 0 \Rightarrow \varphi(z) = $ σταθ

$\rightarrow \varphi(z)$ σταθερή.

• $a - z = w$

$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

• Έστω $z = iy$, τότε $\left| e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots \right| =$

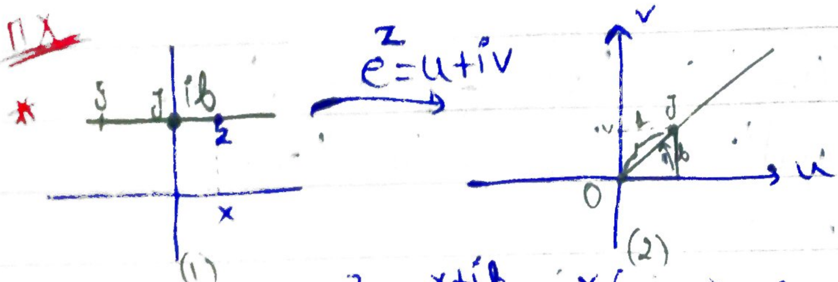
$1 + i\frac{y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + \dots$

$$=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\dots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-+\dots\right)$$

$$=\sigma\upsilon\nu(y)+i\,\eta\mu(y)$$

• Έστω $z=x+iy$, $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=\boxed{e^x(\sigma\upsilon\nu(y)+i\,\eta\mu(y))}$

Π.χ.

* 

b: τεμνόμενος στο (1)

b: ακτίνα στο (2)

$z=x+ib$, άρα $e^z=e^{x+ib}=e^x(\sigma\upsilon\nu(b)+i\,\eta\mu(b))$

$$=\underbrace{e^x\sigma\upsilon\nu(b)}_{u}+\underbrace{e^x i\,\eta\mu(b)}_{v}$$

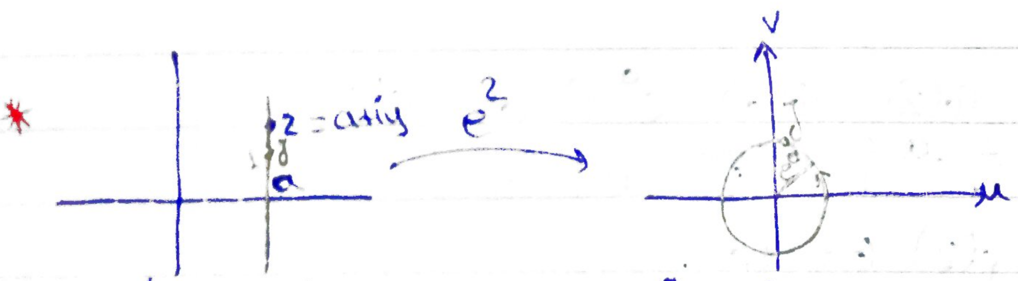
$\begin{cases} u=e^x\sigma\upsilon\nu(b) \\ v=e^x\eta\mu(b)\end{cases}$ αντι-στρέφω $\frac{v}{u}=\frac{\eta\mu(b)}{\sigma\upsilon\nu(b)}=\varepsilon\varphi(b)=\lambda$

Άρα έχω $\boxed{v=\lambda u}$ ευθεία.

$u^2+v^2=e^{2x}$

$|u+iv|=|e^x|$, δε γίνεται ποτέ <0

Άρα η εικόνα είναι ημιευθεία που ξεκινά από το O και έχει κλίση $\lambda(=\varepsilon\varphi(b))$

* 

$$e^z=e^{a+iy}=e^a\cdot e^{iy}=\underbrace{e^a\sigma\upsilon\nu(y)}_{u}+i\underbrace{e^a\eta\mu(y)}_{v}$$

$\begin{cases} u=e^a\sigma\upsilon\nu(y) \\ v=e^a\eta\mu(y)\end{cases}$, $u^2+v^2=e^{2a}$: $|u+iv|=e^a$ κύκλος

Είναι περιοδική

Για y: e^a συν1, e^a ημ1

* + ιδιότητα Εκθ-τικής

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = e^{z}\left(\text{συν}(2\pi) + i\,\text{ημ}(2\pi)\right) = e^{z}$$

Άρα $e^{z+2\pi i} = e^{z}$

Δηλ. είναι <u>Περιοδική</u>.

* + ιδιότητα

$$e^{z} \cdot e^{a-z} = e^{a}$$

$a=0$: $e^{z} \cdot e^{-z} = 1 \Rightarrow e^{-z} = \frac{1}{e^{z}}$, $e^{z} \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.